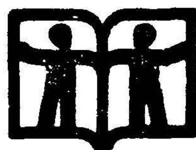
இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

தொகுதி I, II-க்குரிய

பிற்சேர்க்கை

தி. கோவிந்தராசன்





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

தொகுதி I, II-க்குரிய

பிற்சேர்க்கை

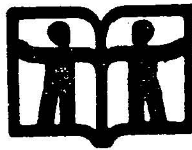
ஆசிரியர்

தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ., எல்.டி.,

கணிதப் பேராசிரியர்

அரசினர் கலைக் கல்லூரி,

சேலம்





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

Supplement—September, 1972

ALGEBRA—Supplement

(for Vol. I and II)

T. GOVINDARAJAN

Price Re. 0-70

(or supplied free of cost when original book is purchased)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Paramount Printers,
31, Meeran Sahib St.,
Madras-2

பொருளடக்கம்

14. மெய்யெண்கள்

(Real Numbers)

A அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்*

(Rational Numbers)

14·1· **அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் : வரையறை :**

p, q என்பவை கூட்டு அல்லது குறை முழு எண்களாயிருப்பின் p/q என்பது ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் என வரையறுக்கப்படும். இவ் வரையறையில்,

(i) p, q இரண்டிற்கும் 'ஒன்று' நீங்கலாக மற்றேதும் பொதுக் காரணிகள் இல்லை எனவும் (அப்படியிருப்பின் அவைகளை நீக்கிவிடலாம்)

(ii) கீழெண் q ஒரு கூட்டு முழு எண் எனவும் ஏற்கிறோம். ஏனெனில்

$$\frac{p}{-q} = \frac{-p}{q};$$

$$\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$$

இவ்வித எண் இனம் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணினம் அல்லது அளவுக்கிணங்கிய எண்கணம் எனப்படும்.

இவ் வினத்தில் '0' என்ற பூச்சியத்தையும் ஓர் உறுப்பாகச் சேர்த்துக் கொள்ளலாம்; அப்போது p-மட்டும் பூச்சியமாகும்.

* புகுமுக வகுப்புக் கணிதம் Vol I } தி. கோவிந்தராசன்,
இயற்கணிதம் (B. Sc.) Vol II } கோ. முத்துசாமி.
என்ற இரு நூல்களிலும் முதல் அத்தியாயத்தைப் படிக்கலாம். அவ் விரு பகுதிகளும் இப் பகுதிக்குப் பயன் தரும் முன்னுரையாயிருக்கும்.

கூட்டு, குறை பின்னங்களும் பூச்சியமும் சேர்ந்து அளவுக் கிணங்கிய எண்களாகும். (வேறொன்றும் கூறப்படாவிடத்து $\frac{p}{q}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்ணில் p, q என்ற எண்களுக்கு 'ஒன்று' நீங்கலாக வேறு பொதுக் காரணிகள் இல்லையென்றே கொள்க).

14·2· இந்த அடிப்படையில் பின்வருவன எளிதில் விளங்கும், அல்லது எளிதில் நிறுவப்படும்.

14·2·1· r, s இரு அளவுக் கிணங்கிய எண்களாயின் $r+s$, $r-s$, rs, $\frac{r}{s}$ எல்லாம் அளவுக்கிணங்கிய எண்களாகும்; $\frac{r}{s}$ - ல் $s=0$ என்பது மட்டும் விலக்காகும். ஏனெனில் $s=0$ ஆனால் $\frac{r}{s}$ -க்குப் பொருளொன்று மில்லை.

14·2·2· λ, m, n என்பவை கூட்டு அளவுக் கிணங்கிய எண்களாயின்,

$$\lambda\ (m^2-n^2),\quad 2\lambda mn,\quad \lambda\ (m^2+n^2)$$

என்பவை அளவுக்கிணங்கிய எண்கள். மேலும்

$$\lambda^2\ (m^2-n^2)^2 + 4\lambda^2 m^2 n^2 = \lambda^2\ (m^2+n^2)^2$$

என்பது பொருந்துவதால் இம் மூன்று எண்களின் அளவுகளும், $\lambda\ (m^2+n^2)$ என்ற அளவினைத் தனது செம்பக்கமாகக் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகும்.

14·2·3· முடிவுபெற்ற எல்லாப் பதின்பகுப்புப் பின்னங்களும் (தசம பின்னங்கள்—terminating decimals) அளவுக்கிணங்கிய எண் களாகும்; மடங்கிவரும் பதின்பகுப்புப் பின்னங்களும் (Recurring decimals) அளவுக்கிணங்கிய எண்களாகும். மறுதலையாக, எல்லா அளவுக்கிணங்கிய எண்களும் ஒரு முடிவுபெற்ற பதின்பகுப்புப் பின்னங்களாகும் என்று கூறமுடியாது; சில முடிவு பெற்றவை யாயிருக்கும்; பிற மடங்கி வருவனவாயிருக்கும்.

ஆனால், மடங்கிவரும் தன்மையின்றி முடிவில்லாது செல்லும் பதின்பகுப்புப் பின்னம் ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாக இருத்தல் இயலாது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

$\frac{1}{2} = \cdot 5$ (முடிவுபெற்ற பகுதிப் பின்னம்)

$\frac{1}{3} = \cdot 333\ldots$ (மடங்கிவரும் பதின்பகுப்புப் பின்னம்)

$\frac{1}{15} = \cdot 0666\ldots$ (மடங்கிவரும் பதின்பகுப்புப் பின்னம்)

ஆனால்,

$\cdot 123476437428743\ldots\ldots$

என்ற ஒரு மடங்கிவராப் பதின்பகுப்புப் பின்னமாய் இருப்பதால் அது ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாக இருக்க முடியாது.

குறிப்பு 1: $\frac{p}{q}$ என்ற அளவுக் கிணங்கிய எண்ணில் p, q இரண்டிற்கும் '1' தவிர வேறு பொதுக் காரணிகள் இல்லையெனக் கொள்க.

q-மட்டும் எடுத்துக்கொள்வோம். qஐ, பகாவெண் காரணிகள் கொண்டு பிரித்தெழுதினால் பின்வரும் இரு அமைப்புகளில் ஒன்றில் வரும் :

(i) $q = 2^m \cdot 5^n$ ($m = 0, 1, 2\ldots$; $n = 0, 1, 2.$ m, n இரண்டும் ஒருங்கே பூச்சியமாகாது ; அப்படியானால் $q = 2^0 \cdot 5^0 = 1$; $\frac{p}{1}$ = முழு எண் ஆகும்).

(ii) $q = 2^m\ 5^n\ \alpha^r . \beta^s\ldots$ [α, β ......என்பவை பகாவெண்கள் ; m, n, r, s......என்பவை ஒருங்கே பூச்சிய மாகாமல் 0, 1, 2,... என்ற மதிப்புகளை யேற்கலாம்].

(i) இங்கு $q = 2^m \cdot 5^n$ என்ற மதிப்புடையதாயிருப்பின், $\frac{p}{q}$ ஐ ஒரு முடிவுபெற்ற பதின்பகுப்புப் பின்னமாக எழுதலாம். இதன் மறுதலையும் உண்மையாம்.

(ii) $q = 2^m \cdot 5^n \cdot \alpha^r . \beta^s \ldots\ldots$ ($r \neq 0$, அல்லது $s \neq 0 \ldots$ அதாவது $r, s \ldots$ எல்லாம் ஒருங்கே பூச்சியமாகாதிருப்பது) என்ற மதிப்புடையதாயிருப்பின், $\frac{p}{q}$ ஐ ஒரு மடங்கிவரும் (recurring) பதின்பகுப்புப் பின்னமாக எழுதலாம்; இது ஒரு முடிவு பெற்ற

பதின்பகுப்புப் பின்னமாகாது. இதன் மறுதலையும் உண்மை யாம்.

குறிப்பு 2: இன்னும் பொதுவாகச் சில உண்மைகளையும் கூறலாம்.

ஒரு பதின்பகுப்புப் பின்னத்தில் மடங்கிவராத **m** இலக்கங்களும், மடங்கி வரும் *n* இலக்கங்களும் இருப்பின், அதை $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பிலிட்டால்,

q-ல் 2^m அல்லது 5^m ஒரு காரணியாக விருக்கும்; *m*-க்கு மேற்பட்ட ஒரு முழு எண் 2-ன் அல்லது 5-ன் படியாக இருக்க முடியாது.

இதன் மறுதலையும் பொருந்தும்.

எ - கா. (*a*) $\frac{83}{2560} = \frac{83}{2^9 \cdot 5}$

$= 0{\cdot}032421875$

$0 \cdot 74523 = \frac{74523}{100000}$

$= \frac{74523}{2^5 \cdot 5^5}$

ஆனால் (*b*) $\frac{29}{600} = \frac{29}{3 \times 2^3 \times 5^2}$

$= 0 \cdot 048\dot{3}$ ......என வரும்.

·048 என்பது மடங்கி வராத பகுதி ; மூன்று இலக்கங்கள் இப் பகுதியிலிருப்பது காண்க. 3 என்ற இலக்கம் மடங்கி வருவதும் காண்க.

மேலும் (*c*) $\frac{1}{420} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5 \times 7}$

$= \cdot 00\dot{2}\dot{3}\dot{8}\dot{0}\dot{9}\dot{5}$ ...... என வரும்.

இங்கு ·00 என்பது மடங்கி வராத பகுதி ; இரண்டு இலக்கங்கள் இங்கு வருவது காண்க. ‘238095’ என்ற இலக்கங்கள் மடங்கி வருவதும் காண்க.

மற்றும் (*d*) $0 \cdot 75\dot{3}\dot{4}34 \ldots\ldots$

$$= \frac{3}{4} + \frac{34}{10000}\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots \infty\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{34}{10000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{34}{10000} \times \frac{100}{99}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{34}{9900}$$

$$= \frac{7459}{9900}$$

$$= \frac{7459}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11}$$

14·2·4. எல்லாக் கூட்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களையும் பின் வருமாறு, முறையாக ஒரு தொடர்வரிசையில் எழுதலாம்.

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$$

இத் தொடர்வரிசையில் $[\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q]$ என்ற இடத்தில் வரும் அளவுக்கிணங்கிய எண் $\frac{p}{q}$ எனக் காணலாம்.

குறிப்பு : இத் தொடர்வரிசையில், ஒவ்வோர் அளவுக் கிணங்கிய எண்ணும் எண்ணற்ற முறைகளில் திரும்பத் திரும்பத் தோன்றுவதைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக '1' என்ற எண் $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots\ldots$ என வருவதைக் காணலாம். '$\frac{1}{2}$' என்ற எண் $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$ என வருவதைக் காணலாம். இவ்வாறு திரும்பத் திரும்ப ஒரே எண் வருவதை நாம் தவிர்க்க முடியுமானால் அப்படித் தவிர்த்து எழுதினால், $\frac{p}{q}$ என்ற எண் அவ் வரிசையில் எந்த இடத்தில் வருகிறதென்று காண்பது மிகச் சிக்கலாகும். எனவே தான் இம் முறை கையாளப்பட்டது.

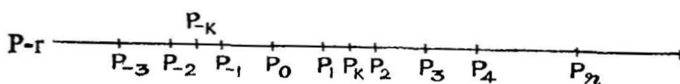
14·3· அளவுக்கிணங்கிய எண்களை ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் புள்ளிகளாகக் குறித்தல்

இயற்கணிதத்திலும் நுண்கணிதத்திலும் பொதுவாகப் பகுப்பாய்விலும் (Analysis), வடிவகணித முறைகளைக் கையாண்டு விளக்கம் பெறுதல் பயன்தரும் ஒரு முறையாகும்.

எனினும் இவ்வாய்வு வடிவகணிதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ள தென்றே, வடிவகணித முறைமேல் நாம் சார்ந்திருக்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தம் உண்டென்றே ஏதுமில்லை. எடுத்துக்காட்டுகளாக விளக்கங்கள் பெற அக் கருத்துகள் ஏற்கப்படுகின்றன என்பதைமட்டும் நாம் மறந்துவிடக்கூடாது. இந்த அடிப்படையில் நாம் சில வடிவகணிதக் கருத்துகளைக் கையாளுவோம்.

14.3.1. ஒரு நேர்கோடு என்றாலென்ன? நேர்கோட்டுத் துண்டு அல்லது அந் நேர்கோட்டுப் பகுதி என்றாலென்ன? என்ற சாதாரண நடைமுறைக் கருத்துகள் நமக்குத் தெரியும்.

L என்ற, இரு பக்கங்களும் நீட்டப்படக்கூடிய ஏதானுமொரு கிடைகோட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். அதில் P_0 என்ற ஏதானுமொரு புள்ளியை ஆதிப் புள்ளியாகக் கொள்வோம். அந்தப் புள்ளி '0' என்ற பூச்சியத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். பின்னர் $P_0 P_1$ என்ற ஒரு பகுதியை P_0-க்கு வலப்புறம் இடங் குறிப்போம். (படம் 14.3.1. காண்க).



படம் 14.3.1.

P_0P_1 என்ற நீளத்தை ஓர் அலகு (an unit) என்று கொள்வோம். அப்போது P_1 என்பது 1 (ஒன்று) என ஏற்போம். அதாவது P_0, P_1 என்ற புள்ளிகள் முறையே பூச்சியம் (0), ஒன்று (1) என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன.

$r = \dfrac{p}{q}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு எண்ணை அந் நேர்கோட்டின்மேல் குறிக்க $\dfrac{P_0P_r}{P_0P_1} = r$ என்ற சமன்பாட்டிற் கொப்ப, P_0-க்கு வலப்புறம் அந் நேர்கோட்டில் P_r என்ற புள்ளியை

இடங்குறித்தால், P_r என்பது $r\left(=\frac{p}{q}\right)$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு எண்ணைக் குறிக்கும். இங்கு $r > 1$ எனத் தெரிகிறது.

P_0-க்கு வலப்புறம் இடங்குறிக்கப்படும் புள்ளி கூட்டு மதிப்புடையதோர் எண்ணை இடங்குறிக்கும் எனவும், P_0-க்கு இடப்புறம் இடங்குறிக்கப்படும் புள்ளி குறை மதிப்புடையதோர் எண்ணைக் குறிக்கின்றதெனவும் ஒரு மரபினை ஏற்போம். P_0P_r என்ற அளவுகொண்டு P_0-க்கு இடப்புறம் P_{-r} என்ற புள்ளியை அந்நேர்கோட்டின்மேல் இடங்குறிப்போம். அப்போது P_{-r} என்ற புள்ளி $-r$ $\left(=\frac{-p}{q}\right)$ என்ற குறை அளவுக்கிணங்கிய எண்ணை இடங்குறித்து நிற்கும். மேலும்

$$P_0 P_{-s} = - P_{-s} P_0 = - P_0 P_s$$

எனக் கூறலாம். எனவே r என்ற எந்தக் கூட்டு குறைமதிப்புள்ள அளவுக்கிணங்கிய எண்ணையும் குறிக்க

$$P_0 P_r = r \cdot P_0 P_1$$

என்பதற்கொப்ப, P_r என்ற ஒரு புள்ளி பெறப்படுவதைக் காணலாம்.

எனவே, P_0P_1 என்ற நீளத்தை ஓரலகு (an unit) எனக் கொண்டால் $P_0P_r = r$ என்று கூறலாம். இம்மாதிரியாகப் பெறப்படும் P_r என்ற வகைப்பட்ட புள்ளிகளை நேர்கோட்டில் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் (Rational points) எனக் கூறலாம்.

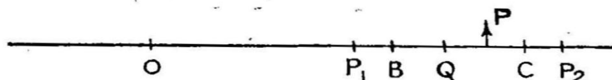
இந்த அடிப்படையில் அந்த நேர்கோட்டில் BC என்ற ஏதானுமொரு துண்டை எடுத்துக்கொண்டால் BC என்ற துண்டில் எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் அடங்கி இருக்கின்றன என்று காணலாம்.

இப்போது படம் 14·3·1-ல் 1, 2, 3, 4,...என்ற எண்களைக் கீழெண்களாகக் கொண்ட அளவுக்கிணங்கிய எண்களையெல்லாம் இடங்குறிப்போமானால், மிக மிக அடர்த்தியாகப் புள்ளிகள் இடங்குறிக்கப்படுவதைக் காணலாம்; எவ்வளவு நெருக்கமாக வேண்டுமென்றாலும் அப் புள்ளிகளை அமைக்க முடியுமென்பதையும் காணலாம்.

சிறப்பாக BC என்ற ஒரு துண்டை எடுத்துக்கொள்வோம் (படம் 14·3·2· காண்க). BC என்ற துண்டு P_1P_2 என்ற பகுதியில் இருக்கிறதெனக் கொள்வோம். P_1P_2 ஓரலகு நீளமுடைய தாதலால்

$$k \cdot BC > 1$$

என்ற வகையில் k என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் இருத்தல் வேண்டும். இப்பொழுது P_1P_2ஐ k சம பாகங்களாகப் பிரித்தால் இவ்விதமாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளில் குறைந்தது ஏதாவதொன்று (P-எனக் கொள்க) BC என்ற பகுதியில் இருக்கும் எனவும், அது B உடனே C உடனே ஒன்றுத ஒரு புள்ளியாக இருக்குமெனவும் காணலாம். ஏனெனில் அவ்வாறு இல்லாவிட்டால் BC முழுவதும் அப் பகுதிகளில் ஒன்றில் முற்றிலும் அடங்கி இருத்தல் வேண்டும்; அப்போது $k \cdot BC > 1$ என்று நாம் முதலில் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்படும். ஆகவே P என்ற புள்ளி k என்ற கீழெண் உடைய ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணைக் குறிக்கும். எனவே B, C என்ற இரு புள்ளிகளுக்கிடையே குறைந்தது ஓர் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளி இருத்தல் வேண்டும் என்று புலனாகின்றது.



படம் 14·3·2·

[படம் 14·3·2-ல் ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டினால் இது விளக்கப் படுவது காண்க. $k=2$ எனக் கொள்வோம்; அதாவது $2 \cdot BC > P_1P_2 (=1)$. P_1P_2ஐ P-என்ற புள்ளியில் இரு சமபாகங் களாகப் பிரித்தால் P என்பது B, C என்ற இரு புள்ளிகளோடும் ஒன்றுது, B-க்கும், C-க்கும் இடையே இருப்பதைக் காண்க]. இவ்வாறாக B-க்கும் P-க்கு மிடையே ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணைக் குறிக்கும் Q என்ற புள்ளி காணலாம்; அப்படியே B-க்கும் Q-க்கும் இடையே,......இவ்வாறாக நாம் விரும்புமளவு புள்ளிகள் கண்டு செல்லலாம். இந்த உண்மையைத்தான் இப் பத்தியின் முதலில்

'BC என்ற துண்டில் எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் குவிந்து கிடக்கின்றன' வெனக் கூறினேம்.

இந்த உண்மையிலிருந்து பின்வரும் கொள்கை எளிதில் புலனாகும்.

r என்ற ஓர் அளவுக்கு இணங்கிய எண் கொடுக்கப்பட்டு, n என்ற எந்த ஒரு கூட்டு முழு எண்ணும் கொடுக்கப்பட்டால், r-க்கு மேற்பட்டோ அல்லது குறைந்தோ

$$|r-s| < \frac{1}{n}$$

என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்கிய வகையில் **s** என்ற ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் காணமுடியும். இதையே வேறு விதமாகக் கூறினால், nஐ நாம் மிகப் பெரிய கூட்டு முழு எண்ணாகக் கொண்டால், **r**-க்கும் **s**-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டை நாம் எவ்வளவு சிறிதாக வேண்டுமானாலும் செய்யலாம் என்பது கிடைக்கின்றது. அதுமட்டு மன்று, **r, s** என்ற இரு அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அவ்விரு எண்களுக்கிடையே எத்தனை அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் வேண்டுமானாலும் இடைச்செருகலாகப் பெறலாம்; அவற்றில் அடுத்தடுத்த இரு எண்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டை எவ்வளவு சிறிதாக வேண்டுமானாலும் செய்யலாம் என்பது விளக்கமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, பின் கூறப்படுவதைக் கவனிக்கவும். $r=\frac{3}{2}$, $s=\frac{7}{4}$, $n=100$ எனக் கொள்வோம். $\frac{3}{2}$-க்கும், $\frac{7}{4}$-க்கு மிடையே எத்தனை அளவுக்கிணங்கிய எண்களை வேண்டுமானாலும் காணலாம்.

குறிப்பாக,

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{200}, \frac{3}{2}+\frac{2}{200}, \frac{3}{2}+\frac{3}{200}, \cdots \frac{3}{2}+\frac{50}{200}\cdots$$

என்ற வரிசையிலுள்ள எண்களெல்லாம்,

(i) அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்,

(ii) அடுத்தடுத்து வரும் எண்களுக்கிடைப்பட்ட வேறுபாடு $\frac{1}{200} < \frac{1}{100}$. இது ஓர் எடுத்துக்காட்டு; இதைப் பொதுப்படுத்திக் காண்பதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்க.

இதுவரை நாம் கண்டதிலிருந்து ஒரு நேர்கோட்டைப் பற்றி அறியவேண்டிய எல்லாம், அந் நேர்கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ள அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகளைக்கொண்டு புரிந்துகொள்ள முடியுமென முடிவுகட்டத் தோன்றும். ஆனால் சற்றுக் கூர்ந்து பார்த்தால், ஒரு நேர்கோடு அளவுக்கிணங்கிய புள்ளிகளால்மட்டும் ஆனது என்ற கொள்கை பல சிக்கல்களில் கொண்டுபோய்விடும். ஒரு நேர்கோட்டைப்பற்றிப் பின்வரும் கொள்கைகளை நாம் சாதாரணமாக ஏற்றுக்கொள்ளுகிறோம்.

(i) ஒரு நேர்கோடு புள்ளிகளால் ஆனது;

(ii) அதில் ஒரு பகுதி என்பது இரு முனைப்புள்ளிகளோடு அவற்றிற் கிடைப்பட்ட புள்ளிகளால் ஆனது.

(iii) ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் நீளம் என்ற ஒரு பண்பு அல்லது அளவு உண்டு.

(iv) அந் நீளத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட அலகு கொண்டு அளக்கலாம்.

(v) இந் நீளங்களில் இயற்கணிதச் 'செயல்'களை வரையறை செய்யமுடியும்.

அதாவது PQ-ன் நீளம் **a** எனவும் PQ-ன் வலப் புற நீட்டலில் QR-ன் நீளம் **b** எனவும் இருப்பின் PR $= a+b$ எனக் கூறலாம்.

மேலும் இவ்வாறுக வரையறுக்கப்பட்ட நீளங்கள்

(i) $a+b = b+a$

(ii) $a+(b+c) = (a+b)+c$

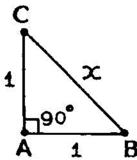
(iii) $ab = ba$

(iv) $(ab)c = a(bc)$

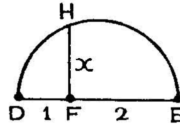
(v) $a(b+c) = ab+ac$

என்ற விதிக்குக் கட்டுப்படுகின்றன வென்பதும் நமக்குத் தெரியும். (இங்கு a, b, c என்பவை மூன்று நீளங்கள்.)

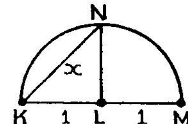
முக்கியக் குறிப்பு: ஆனல் எடுத்துக்காட்டாக வடிவகணிதச் செயல்முறைப்படி $x^2 = 2$ என்பதற்குச் சரியான ஒரு x-நீளம் காணமுடியுமென நாம் அறிவோம். பின்வரும் படங்கள் அதை **விளக்கி நிற்கும்.**



(i)



(ii)



(iii)

படம் 14·3·4·

$x = BC = FH = KN$

$x^2 = 2$

எனப் படங்களிலிருந்து நாம் காண்கிறோம். எனவே 14·3·1· என்ற படத்தில் O-விருந்து P_0P_k = BC (அல்லது FH அல்லது KN) என்ற ஒரு துண்டு வெட்டினால் $x^2=2$ என்ற சமன்பாட்டிற் கொப்ப $P_0P_k=x$ என வரும். எனவே நாம் 14·3·1·ல் ஏற்ற நேர் கோட்டின்மேல் x என்ற அளவுள்ள ஒரு நீளமும், அதற்கொப்ப $P_0P_k=x$ என்ற வகையில் P_k என்றதொரு புள்ளியும் இருக்க வேண்டுமென அறிகிறோம்.

B. அளவுக்கிணங்காத எண்கள் (Irrational numbers)

14·3·5. ஆனால் எந்த ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணையும் இருபடிக் குயர்த்தினால் **2** கிடைக்காது. இதைப் பின்வரும் முறை களில் நிறுவலாம்.

முறை I :

$\frac{m}{n}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணை இருபடிக் குயர்த்தினால் **2** கிடைப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். இது நம் கொள்கைக்குப் (hypothesis) புறம்பான ஒரு முடிவிற்கு நம்மைக் கொண்டு செல்லும் எனப் பின்வருமாறு உணரலாம். முதலில் $\frac{m}{n}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்ணில் m-ம், n-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண் எனக் கொள்ளலாம். (ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாக இல்லாவிடில் பொதுக் காரணிகளை நீக்கி, நாம் கொண்டுள்ள நிலைக்குக் கொண்டு வரலாம்). மேலும் $\frac{m^2}{n^2} = 2$ என ஏற்றுக்கொள்வோம். (1) எனவே $m^2=2n^2$. எனவே m^2 ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும். எனவே m-ம் ஓர் இரட்டைப்படை எண். அதாவது

$$m = 2p \text{ எனக் கொள்க.}$$

எனவே $4p^2 = 2n^2$

அ-து $n^2 = 2p^2$

ஆகவே n^2 ஓர் இரட்டைப்படை எண். எனவே n-ம் ஓர் இரட்டைப்படை எண் என்றாகும். அதாவது m, n இரண்டும் இரட்டைப்படை எண்ணாகின்றது. இது $(m, n) = 1$ என்ற

கொள்கைக்கு முரண்பாடாகின்றது. எனவே $\frac{m^2}{n^2} = 2$ என்பது ஒவ்வாத ஒன்ருகும். எனவே வேண்டியது நிறுவப்பட்டது.

முறை 2:

முன்னர் ஏற்றபடியே $\frac{m}{n}$ என்ற ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணின் இருபடி **2** எனக்கொள்வோம். (m, n இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் எனக் கொள்வோம்.)

அதாவது $m^2 = 2n^2$

எனவே இக் கொள்கைப்படி

$$\begin{aligned}(2n-m)^2 &= 4n^2+m^2-4mn\\ &= 2n^2+2n^2+m^2-4mn\\ &= 2n^2+2m^2-4mn\\ &= 2\,(m-n)^2\end{aligned}$$

என்ருகும். அதாவது

$$\left(\frac{2n-m}{m-n}\right)^2 = 2$$

அதாவது $\frac{m}{n}$ ஐத் தவிர $\left(\frac{2n-m}{m-n}\right)$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்ணின் இருபடியும் **2** ஆகிறது.

மேலும்

$$m^2 = 2n^2 < 4n^2$$
$$\therefore \quad m < 2n$$

என்பதாலும்

$$m^2 > n^2$$
$$\therefore \quad m > n$$

என்பதாலும்

$$n < m < 2n$$

என்று நமக்குத் தெரிகின்றது. ஆகவே

$$m-n < n$$

எனவே $m-n$ ஐக் கீழே கொண்ட மற்றோர் எண்ணும் தன் இருபடி மதிப்பு **2** என்ற வகையில் அமைந்திருக்கிறதெனப் பெறப்படுகின்றது. இது முன்னுக்குப் பின் முரணாக அமைவதைக் காணலாம்; ஏனெனில் $\frac{m}{n}$ என்ற பின்னத்தில் m-ம், n-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களென்பது நாம் முதலில் ஏற்றதொரு கொள்கையாகும். எனவே $\frac{m}{n}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள ஓர் எண்ணின் இருபடி **2** ஆக இருக்க இயலாதென நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: பொதுவாகப் பின்வரும் கோட்பாடு பொருந்தும். $\frac{p}{q}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்ணின் இருபடி $\frac{m}{n}$ ஆயின், m, n இரண்டும் தனித்தனியாக சரியான இருபடியாக இருக்க வேண்டும். அப்படி m, n இரண்டும் தனித்தனியாக இருபடி எண்களாயில்லாதிருப்பின் $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள எந்த எண்ணின் இருபடியும் $\frac{m}{n}$-க்குச் சமமாயிராது என்று நிறுவலாம்.

m, n - இரண்டும் தனித்தனியாக இருபடியாயில்லாமல் $\frac{p^2}{q^2}=\frac{m}{n}$ என்ற சமன்பாடு பொருந்துகிறதெனக் கொள்வோம். (p, q ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்; m, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்). அப்போது

$$mq^2 = np^2$$

என்றாகும். எனவே q^2-ன் ஒவ்வொரு காரணியும் np^2-ன் காரணியாக விருக்க வேண்டும். p, q-இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாதலால் q^2-ன் ஒவ்வொரு காரணியும் n-ன் காரணியாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது

$$n = \lambda q^2$$

என்பது பொருந்த வேண்டும். λ-ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கவேண்டும். எனவே

$$mq^2 = \lambda\, p^2q^2$$

அதாவது

$$m = \lambda\, p^2$$

என்று கிட்டும். எனவே நாம் முதலில் ஏற்ற கொள்கை வழி

$$n = \lambda q^2$$
$$m = \lambda p^2$$

என வரவேண்டிய கட்டாயமேற்படுகிறது; அதாவது m, n இரண்டிற்கும் பொதுவாக λ-என்ற கூட்டு முழு எண் காரணியாக உள்ளது என்ற முடிவு கிட்டுகின்றது. இம் முடிவு m, n என்ற இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண் என்று ஏற்ற கொள்கைக்கு முரணுகின்றது. எனவே

$$\frac{m}{n} = \frac{p^2}{q^2}$$

ஆக இருப்பின், $m = p^2$, $n = q^2$ என்று மட்டும்தான் பொருந்தும். அதாவது வேண்டியது நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு 2: இப் பொதுத் தேற்றப்படி $x^2=3$, $y^2=5$, $z^2=6$,... என்ற சமன்பாடுகளைப் பொருந்தவைக்கும் x, y, z,...போன்றவை அளவுக்கிணங்காத எண்களெனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $x^2 = 3$ எனில் x-ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண் எனப் பொதுத் தேற்றம் பயன்படுத்தாமல் நிறுவுக.

முடியுமென்றால் $\frac{p^2}{q^2} = 3$ எனக் கொள்க. (p, q இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்). எனவே $p^2 = 3q^2$ எனக் கிட்டும். எனவே p^2-ன் காரணிகளில் ஒன்று 3 ஆக இருத்தல் வேண்டும். எனவே p-லும் **3** காரணியாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது,

$$p = 3\lambda$$

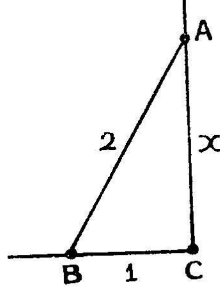
எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad 9\lambda^2 = 3q^2$$
$$\therefore \quad 3\lambda^2 = q^2$$

$\therefore$ q-என்பது 3ஐக் காரணியாகக் கொண்டது. அதாவது p-ம், q-ம் 3ஐப் பொதுக் காரணியாக உடைய எண்கள். இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே வேண்டியது கிட்டியது.

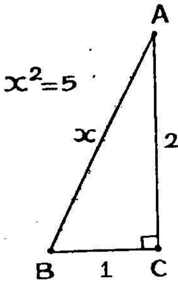
குறிப்பு 3: இதையே அதாவது $\sqrt{3}$ என்பதை ஒரு நீளமாகப் பின்வருமாறு காணலாம்.

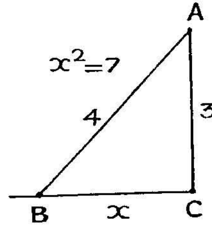
2 அலகு அளவுள்ள ஒரு செம்பக்கம், மற்றோர் செங்கோணப் பக்கம் 1 என்ற அளவோடு ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைந்தால் எஞ்சிய பக்கத்தின் இருபடி '3' ஆகும் என நாம் காண்கிறோம். படம் 14·3·5·1· காண்க.

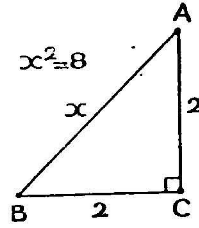


படம் 14·3·5·1·

எ-கா. 2: $x^2 = 5$, $x^2 = 7$, $x^2 = 8$ என்பவைகளுக்குரிய நீளங்களைப் பின்வரும் செங்கோண முக்கோணப் படங்களில் காண்க.







படம் 14·3·5·2·

எ-கா 3: $\log_{10}^{5} = x$ ஆனால், x-என்பது ஓர் அளவுக் கிணங்கிய எண் அன்று என நிறுவுக.

முடியுமானால் $x = \frac{p}{q}$ எனக் கொள்வோம். p, q கூட்டு முழு எண்கள். எனவே

$$5 = 10^{p/q}$$

அதாவது

$$5^q = 10^p$$

என்றாகும். p-எதுவானாலும் 10^p பூச்சியத்தில் முடியும் முழு எண்.

q-எதுவானாலும் 5^q என்பது 5 என்ற இலக்கத்தில் முடியும் ஒரு முழு எண். பூச்சியத்தைக் கடைசி இலக்கமாகக் கொண்ட ஒரு முழு எண்ணும், ஐந்தைக் கடைசி இலக்கமாகக்கொண்ட ஒரு முழு எண்ணும் ஒருபொழுதும் சமமாகாது. எனவே x-ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் அன்று என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. 4: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$ (கந்தழி வரை)

என்ற மதிப்பு $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள மதிப்பைப் பெற முடியாதென நிறுவுக.

முடியுமானல்,

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots$$

எனக் கொள்வோம். இரு பக்கங்களையும் q!ஆல் பெருக்கினுல்

$$p\,(q-1)! = \text{ஒரு முழு எண்} + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

எனக் கிட்டும். இடப்புறம் ஒரு முழு எண்ணுகும். வலப்புறத்தின் பின் பகுதி

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

$$< \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots \text{ (கந்தழி வரை)}$$

$$= \frac{1}{q+1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{q}$$

= ஒன்றுக்குக் குறைந்த ஒரு பின்னம்.

எனவே இடப்புறமுள்ள ஒரு முழு எண் மதிப்பு

= ஒரு முழு எண் + ஒரு பின்னம்

என்ற முடிவு வருகிறது. இது ஒரு பொருந்தா முடிவாகையால் e-ன் மதிப்பை $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பில் அளவிட முடியாது.

எ-கா. 5 : எந்த ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணின் முப்படியும் **2**-க்குச் சமமாகாதென நிறுவுக.

முடியுமானால் $\frac{p^3}{q^3} = 2$ எனக் கொள்வோம். (p, q-இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்). அப்போது

$$p^3 = 2q^3$$

$(p, q) = 1$ ஆதலால் **2**, p-க்குக் காரணியாக இருத்தல் வேண்டும். எனவே,

$$p = 2\lambda$$

எனக் கொள்ளலாம். அதாவது

$$8\lambda^3 = 2q^3$$

ஆகவே,

$$q^3 = 4\lambda^3$$

எனவே q-க்கு **2** அல்லது λ காரணியாகும். இது $(p, q) = 1$ என்ற முடிவிற்கு முரண்பட்டதாகும். எனவே வேண்டியது கிட்டியது.

பயிற்சி 14·1·

1. $\frac{p}{q}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்ணில் p-க்கும் q-க்கும் பொதுக் காரணிகள் ஏதுமில்லை. அப்படியானால் p-ம், q-ம் தனித்தனியே முப்படி யெண்களாயிருப்பினொழிய

$$\frac{m^3}{n^3} = \frac{p}{q}$$

என்ற சமன்பாடு பொருந்தும் வகையில் $\frac{m}{n}$ என்ற ஓர் அளவுக் கிணங்கிய எண் காண முடியாதென நிறுவுக.

2. கவுஸ் (Gauss) தேற்றம்*

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் $p_1, p_2, \dots, p_n$ யாவும் முழு எண்கள் (கூட்டு அல்லது குறை). இச் சமன்பாட்டின் அளவுக்கிணங்கிய தீர்வுகள் (ஏதுமிருப்பின்) அவை முழு எண்களாக மட்டுமேதான் இருக்கும்.

[* தி. கோவிந்தராசன், கோ. முத்துசாமி : இயற்கணிதம் (B. Sc.) இரண்டாம் புத்தகம், 13·4, தேற்றம் 1 காண்க].

3. மேற்கூறப்பட்ட சமன்பாட்டில் (கணக்கு 2) $p_n=1$ எனவும், $1+p_1+p_2+ \ldots \neq 0$, $1-p_1+p_2-p_3+ \ldots \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளின்கீழ் அச் சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்கிய தீர்வுகள் ஏதுமில்லையெனவும் நிறுவுக.

C. மெய்யெண்கள்
(Real Numbers)

14·3·5·1. எனவே நாம் முன்பத்தியில் கூறிய விளக்கங்களின் அடிப்படையில் பின்வரும் முடிவுகளுக்கு வருகிறோம்.

1. $x^2=2$ என்ற உண்மை பொருந்துமாறு, x-என்ற ஓர் எண்ணும் அதற்குரியதான p-என்ற ஒரு புள்ளியும் தேவைப்படுகின்றன.

2. இப் புள்ளி நாம் 14·3·1-ல் கண்ட நேர்கோட்டில் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகளல்ல; அவ் வினத்தைச் சார்ந்தவையுமல்ல.

3. இவ்வாறாக மற்றும் $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, ... என்ற உண்மைகள் பொருந்துமாறு எண்களும் அவற்றிற்குரிய புள்ளிகளும் தேவைப்படுகின்றன.

4. இப் புள்ளிகள் நாம் 14·3·1-ல் கண்ட நேர்கோட்டில் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் அல்ல; அவ் வினத்தைச் சார்ந்தவையு மல்ல.

ஆகவே 'எண்ணும்' அதற்குரிய 'நீளமும்' என்று வடிவ கணித முறைப்படி நாம் தொடர்புபடுத்திப் பார்க்கும்போது அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒவ்வொரு நீளமும், ஒரு நேர்கோட்டின்மேலே அதற்குரிய ஒவ்வொரு புள்ளியும் தொடர்புபெற்றிருக்கின்றன என்பதை முதலில் கண்டோம். அதோடு நில்லாமல் வடிவகணித முறைப்படி அளவுக்கிணங்காத எண்களோடும் 'நீளங்கள்' தொடர்பு பெற்றிருக்கின்றன என்ற உண்மையும் நமக்குத் தெரிய வந்ததால் எண்ணினத்தைப்பற்றிய கருத்துகளை 'அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்' என்பதோடு நிறுத்திவிடாமல் விரிவுபடுத்தி 'அளவுக் கிணங்காத எண்கள்' என்ற புதியதோர் எண்ணினத்தை நமது தேவைக்கு உருவாக்குகிறோம்.

14·3·6. வடிவகணிதத்தைப் பயன்படுத்தாமல் இயற்கணிதக் கருத்துகளைக் கொண்டும் இப் புதிய எண்ணினமாகிய அளவுக் கிணங்காத எண்களைப்பற்றி நாம் அறிய முடியும்.

இயற்கணிதத்தில் $x^2 = 1$, $x^2-3x+2 = 0$, $2x^2-x-3 = 0$ என்ற பலவகைச் சமன்பாடுகளை நாம் காண்கிறோம். இவற்றின் தீர்வுகள் முறையே $1,-1$; $1, 2$; $-1, \frac{3}{2}$. இவைகளெல்லாம் அளவுக்கிணங்கிய எண்களாகின்றன. ஆனால் $x^2 = 2$, $x^2 = 3$ என்ற சமன்பாடுகளைப் பார்ப்போம். எண்களில் 'அளவுக் கிணங்கிய எண்கள்' மட்டுமே என்ற கருத்து நம்மிடம் இருக்கு மானால், பின்னர்க் கூறப்பட்ட $x^2 = 2$, $x^2 = 3$ என்ற சமன்பாடு களுக்குரிய தீர்வுகளில்லையெனச் சொல்லிவிடுவோம். அவ்வாறே தான் $x^2 = 2$, $x^4 = 5$, $x^7 = 15$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வுகளில்லையெனக் கூறிவிடுவோம். எனவே, எண்களைப்பற்றிய கருத்துகளையும், வரையறைகளையும் அளவுக்கிணங்கிய எண் களோடு நிறுத்திவிடாமல், மேலும் விரிவுபடுத்த வேண்டிய ஓர் இன்றியமையாமை ஏற்படுகின்றது. இந்த விரிவு சாத்தியமா எனக் கண்டு, விரிவுசெய்யக் கூடிய முறைகளைக் கவனிப்போம்.

$x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இரண்டும் அளவுக் கிணங்கிய எண்ணாக இருக்கமுடியாது என்று நாம் கண்டிருக் கிறோம். எனவே, எந்த ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணை எடுத்துக் கொண்டாலும், அதன் இருபடி 'இரண்டி'ற்குக் குறைவாக விருக்கும், அல்லது கூடுதலாயிருக்கும். இந்த அடிப்படையில் எல்லா அளவுக்கிணங்கிய எண்களையும் இரு பிரிவுகளாய்ப் பிரிக்க லாம்: ஒரு பிரிவு, இப் பிரிவிலுள்ள எண்களின் இருபடி '2'க்குக் குறைவானது. மற்றொரு பிரிவு, இப் பிரிவிலுள்ள எண்களின் இருபடி '2'-க்குக் கூடுதலானது. இப் பிரிவினையை அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு எண்களைக்கொண்டு மட்டுமே செய் வோம். முதற் பிரிவை L என்றும், இரண்டாம் பிரிவை R என்றும் கூறுவோம்.

அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்

L	R
$x^2 < 2$ ஆனால் x-இங்கு இடம்பெறும்.	$x^2 > 2$ ஆனால் x-இங்கு இடம்பெறும்.

R-ல் இருக்கும் எந்த எண்ணும் L-ல் இருக்கும் எல்லா எண் களைவிடப் பெரிதாயிருக்கும். 2-க்கும் x^2-க்கும் உள்ள வேறுபாடு

எவ்வளவு சிறிதாக வேண்டுமானாலும் இருக்குமாறு x என்ற ஓர் எண்ணை L-ல் காண இயலும்; $2-x^2<\varepsilon$ [ε எவ்வளவு சிறிய கூட்டு மதிப்புடையதாயும் இருக்கலாம்]. அவ்வாறே y^2-க்கும் 2-க்கும் உள்ள வேறுபாடு எவ்வளவு சிறிதாக வேண்டுமானாலும் இருக்குமாறு, y-என்ற ஓர் எண்ணை R-ல் காண இயலும்; அதாவது $y^2-2<\varepsilon$. இது எவ்வாறு என 2-ன் இருபடி மூலத்தைக் காணும் வகையில் புலப்படும். 2-ன் இருபடி மூலத்தை முறைப்படி கண்டால், பின்வருவன தொடர்ச்சியாக வரும்.

1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142, 1·41424,... (A)

இதன் இருபடிகள் முறையே

1, 1·96, 1·9881, 1·99396, 1· 99996164,... (B)

என வரும். இவை யாவும் 2-க்குக் குறைந்தவை, ஆனாலும் 2ஐ மிக நெருங்கிச் செல்பவை. இன்னும் 6, 7, 8,... பதின்பகுப்புப் பின்ன இலக்கங்களுக்கு நாம் இருபடிமூலம் கண்டுகொண்டே சென்றால் அவற்றின் இருபடி மதிப்புகள் 2 க்கு மிக மிக நெருங்கி ஆனால் 2-க்குக் குறைவாய் மிக மிக அண்மையில் வரும்.

(A)-ல் கண்ட எண்களில் கடைசி இலக்கத்தில் மட்டும் ஒன்று அதிகமாக்கினால் அதாவது

2, 1·5, 1·42, 1·415, 1·4143, 1·41425,... (C)

என்ற எண்களை எடுத்துக்கொண்டால், அவற்றின் இருபடிகள் முறையே

4, 2·25, 2·0164, 2·002225, 2·00024449,... (D)

என வரும்.

இவை யாவும் '2' க்குக் கூடுதலானவை; அனாலும் '2'ஐ மிக நெருங்கிச் செல்பவை. இன்னும் 6, 7, 8,... பதின்பகுப்புப் பின்ன இலக்கங்களுக்குச் சென்றால், அவையும் '2'-க்கு மிக மிக நெருங்கி, ஆனால் 2-க்குக் கூடுதலாய் மிக மிக அண்மையில் வரும். இவ்வாறாக அளவுக்கிணங்கிய எண்ணினத்தில் படாமல் ஆனால் தனது இருபடியை 2-ஆகக் கொண்ட ஓர் எண் இருக்கிறதென நாம் காண்கிறோம்.

மேற்கூறிய விளக்கம், காரண காரிய வழிப்படி அமைந்தாலும், இன்றைய கணித வல்லுநர் அதைச் சாலச் சிறந்ததென ஏற்க

மறுப்பார்கள்; இன்னும் கணித மரபுபடி நுண்மை இருக்க வேண்டுமென விரும்புவார்கள். அது அவ் வல்லுநர்களின் உண்மை காணும் முறையாகும். எனவே, நுண்கணித வல்லுநர்கள் ஏற்றுக்கொள்ளும் பின்வரும் தெரிப்பைக் காண்போம்.

தெரிப்பு : a, b என்ற இரு அளவுக்கிணங்கிய எண்களிடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களை இடைச்செருக இயலுமாதலால் aஐ L-லும் பின்னர் bஐ R-லும் எடுத்துக் கொள்க. மேலும் x-என்ற எண்ணை L-லும், y-என்ற எண்ணை R-லும், $|y-x| < \frac{\delta}{4}$ என்பதற்கு இணங்க எடுத்துக்கொள்ளலாம். அப்போது $y+x < 4$ என விருக்கும் (ஏனெனில், x, y ஒவ்வொன்றும் '2'க்குக் குறைபட்டவை). அப்போது

$$y^2 - x^2 = (y+x)(y-x)$$
$$< 4 \times \frac{\delta}{4}$$
$$= \delta$$

என்ற வகையில் அமையும். எனவே L-பிரிவில் மீப்பெரு எண் என ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணும் இராது; அவ்வாறே, R-பிரிவில் மீச்சிறு எண் என ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணும் இராது. ஏனெனில் L-ல் x என்ற ஓர் எண் $x^2 < 2$ என்ற வகையில் இருப்பதால், $x^2 = 2-\delta$ எனக் கொள்ளலாம். மேலும் L-ல் x_1 என்ற ஓர் எண்ணை

$$x_1^2 > x^2 = 2-\delta$$

என்பதற்கிணங்கக் காணலாம்; அதாவது

$$\delta > 2 - x_1^2$$

அதாவது $$2 - x_1^2 < \delta$$

என்று அமையும். இவ்வாறே

$$x_k^2 > x_s^2 > \dots > x_1^2 > x^2$$

என்று தொடர்ச்சியாக L-ல் அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் கண்டு கொண்டே போகலாம். ஆகவே, மீப்பெரு எண் என்ற ஓர் எண் L-ல் இருக்க முடியாது. அவ்வாறே மீச்சிறு எண் என்று ஓர் எண் R-ல் இருக்க வியலாது.

இதுவரை நாம் விளக்க முயன்றதைப் பின்வருமாறு சுருங்கக் கூறின், கூட்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களைப் பின்வரும் கட்டுப் பாடுகளில் இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) R-ல் உள்ள எந்த எண்ணும் L-ல் உள்ள எல்லா எண்களைவிடப் பெரிது ;

(ii) தமக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு எவ்வளவு மிகச் சிறிதாயிருக்க வேண்டுமானாலும் அவ்வளவு சிறிதாயமைந்து L-ல் ஓர் எண்ணும் R-ல் ஓர் எண்ணும் காண முடியும். (அ-து L-ல் x-ம், R-ல் y-ம் $y-x < \varepsilon$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற் கிணங்கக் காணலாம் ; ε மிகச் சிறிய கூட்டு எண்).

(iii) L-ல் மீப்பெரு எண்ணும், R-ல் மீச்சிறு எண்ணும் இல்லை.

இந்த அடிப்படையில் அளவுக்கிணங்கிய எண்களை இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்க இயலும் என நாம் காண்கிறோம். மேலும், இப் பிரிக்கும் எண் L-லும், R-லும் இருக்க இயலாது. அதாவது இவ்வெண் அளவுக்கு இணங்கிய எண்ணாக முடியாது. இப் பிரிக்கும் எண்ணை

$$x = [\,L/R\,]$$

எனக் குறியிடுவோம். ஈண்டு $x = \sqrt{2}$ என்பதாகும். இதுதான் அளவுக்கிணங்காத எண் என்பதற்கு மிக எளிய எடுத்துக்காட்டு.

இந்த ஆய்வுமுறையைப் பயன்படுத்தி $x^2=3$, $x^3=9$, $x^4=25$ என்ற வகையில் பல அளவுக்கிணங்காத எண்களை நாம் உருவாக்கலாம். பொதுவாக N என்ற ஓர் கூட்டு முழு எண், மற்றோர் கூட்டு முழு எண்ணின் சரியான இருபடியாக இல்லாவிடின் $x^2 = N$ அல்லது $x = \sqrt{N}$ என்பது ஓர் அளவுக் கிணங்காத எண்ணாகும்.

எனவே, இவ்வாறான அளவுக்கிணங்காத எண்கள் இருக்கின்றன எனவும், அவற்றிற்குரிய (எண்) புள்ளிகளை நாம் வடிவ கணித முறையையொட்டி ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் ஒரு திட்டமான புள்ளி கொண்டு குறிப்பிடலாமெனவும் நாம் முடிவு கட்டுகிறோம்.

மெய்யெண்கள் : எனவே நாம் 14·3·1-ல் எடுத்துக்கொண்ட நேர்கோட்டில் அளவுக்கிணங்கிய எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் மட்டுமேயல்லாமல் அளவுக்கிணங்காத எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளும் மலிந்து கிடக்கின்றனவென்பது வெளிப்படையாகத் தெரிகிறது. இந்த அடிப்படையில் எண்ணினத்தில் அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் மட்டுமன்றி அளவுக்கிணங்காத எண்களும்

உள்ளனவென எண்களைப்பற்றிய கருத்துகளை நாம் விரிவுபடுத்துகின்றோம். இவ் விரண்டினங்களும் சேர்ந்து **மெய்யெண்கள்** (Real numbers) என ஒரு விரிவுபட்ட எண்ணினம் நமது கைவசமுள்ளது.

பயிற்சி 14·2·

1. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$ என்ற எண்களின் இருபடிகள் **2**-க்கு எந்த அளவு வேறுபாடுடையன வெனக் காண்க.

2. $\sqrt{2}$-க்கு ஒரு தோராய மதிப்பு $\frac{m}{n}$ எனக் கொண்டு, அதைவிடத் தோராய மதிப்பு $\frac{m+2n}{m+n}$ என நிறுவுக. மேற்கூறப்பட்ட தோராயத் தன்மை கூட்டு, குறை மதிப்புகளால் அளவிடப்படுகின்றனவென நிறுவுக. அதாவது $\frac{m^2}{n^2} > 2$ ஆனால், $\left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^2 < 2$ எனவும், $\frac{m^2}{n^2} < 2$ ஆனால் $\left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^2 > 2$ எனவும் நிறுவுக.

பயிற்சி (1)-ல் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையை, இந்த அடிப்படையில் விரித்தெதுழுக.

$$\left[\frac{m}{n} = \frac{1}{1}\ .\ m = 1,\ n = 1\right.$$

$$\frac{m+2n}{m+n} = \frac{3}{2}$$

அடுத்த எண் $\frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$

அடுத்த எண் $\left.\frac{7+10}{7+5} = \frac{17}{12}\right]$

3. $x \approx \sqrt{2},\ y \approx \sqrt{2},$ ஆனால் $x^2 < 2;$ $y^2 > 2;$ $(2-x^2) < \delta,$ $(y^2-2) < \delta$ என்பவை கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அப்போது $y - x < \delta$ என நிறுவுக.

14·3·6 : வடிவகணித ஊன்றுகோலை விட்டுவிட்டு ஓர் உதவியுமின்றித் தனியாக அளவுக்கிணங்காத எண்கள் எப்படிக் கணிதத்தில் இடம் பெற்றனவெனக் காண்போம்.

சென்ற நூற்றுண்டில் சிறப்பாக வியர்ஸ்ட்ராஸ் (Weirstrass), கான்டார் (Cantor), டெடிகண்ட்(d) (Dedekind), ஹைனே (Heine) போன்ற கணித மேதைகள் ‘ எண் ’ என்ற கருத்தைத் தன்னிலை யாகவே இயங்கக்கூடிய கொள்கைகளின் அடிப்படையில் உருவாக் கிஞர்கள். இவர்கள் உருவாக்கிய கருத்துகளின் அடிப்படையில், அதற்கு முந்திய நூற்றுண்டுகளில் நியூட்டன், லைப்னிட்ஸ் இருவரும் வகுத்த நுண்கணித இயல் (Differential and Integral Calculus) அசைக்கமுடியாத அடித்தளத்தின்மேல் நிறுத்தப்பட்டு ஒரு பெரிய இயலான பகுவியல் (Analysis) என்ற கணிதமாளிகை வளர்ந்தது.

இங்கு டெடிகண்ட், எவ்வாறு அளவுக்கிணங்காத எண்களை வரையறுத்துக் கணித வழக்கில் புகுத்திஞரென்று சுருக்கமாகப் பார்ப்போம். டெடிகண்ட் கொள்கைப்படி, அளவுக்கிணங்காத எண்கள் ஒரு புதிய எண்ணினமாகத் தோன்றுகின்றன. அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் இனத்தோடு அவை பிணைக்கப்பட்டு, அளவுக் கிணங்கிய எண்களை நாம் எந்தெந்த விதங்களில் செயல்படுத்திப் பயன்படுத்துகிறேமோ அந்தந்த விதங்களிலெல்லாம் அளவுக் கிணங்காத எண்களையும் செயல்படுத்திப் பயன்படுத்தக்கூடிய வழிவகைகள் வகுக்கப்பட்டன. இந்த முன்னுரையோடு டெடிகண்ட் முறையைப் பார்ப்போம்.

ஏதோ ஒரு பண்பின் அடிப்படையில் நாம் முதலில் அளவுக் கிணங்கிய எண்களை இடப்புற வகுப்பு (L), வலப்புற வகுப்பு (R) என 14·3·5-ல் கூறியபடி பாகுபடுத்துவோம். பாகுபடுத்தும் போது இடப்புற வகுப்பில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் வலப்புற வகுப்பிலுள்ள எந்த எண்ணையும்விடக் குறைவானது என்ற கட்டுப்பாட்டை அமைப்போம்.

இவ்விதப் பாகுபாடு செய்த பின்பு L-ல் α என்ற எண் இருக்குமானல் α-க்குக் குறைந்த எண்கள் யாவும் L-ல் இடம் பெறும்; R-ல் β என்ற எண் இருக்குமானுல் β-க்கு மிகுந்த எண்கள் யாவும் R-ல் இடம்பெறும். இப் பாகுபாட்டில் மூன்று வெவ்வேறு நிலைகள் உருவாகும்.

1. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண் இருக்கலாம், R-ல் ஒரு மீச் சிறு எண்ணும் இராது.

2. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இருக்கலாம்.

3. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும் இராது; R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இராது. ஒவ்வொரு நிலையையும் சற்று விரிவாக ஆராய்வோம்.

1. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண் இருக்கலாம்; R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இராது.

L-ல் 3-ம் 3-க்குக் குறைந்த எண்களும், R-ல் 3-க்கு மேற்பட்ட எண்களும் இருக்குமானல் பாகுபாட்டுக் கட்டுப்பாடு இப் பிரிவினையில் நிலவுவதைக் காணலாம். 3-என்ற எண் L-ல் மீப்பெரு எண்ணுகும்.

குறிப்பு: இதையே சற்று மாற்றி L-ல் 3-க்குக் குறைந்த எண்களும், R-ல் 3-ம் 3-க்கு மேற்பட்ட எண்களும் இருக்குமானல் L-ல் மீப்பெரு எண் இராது; R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண் '3' எனவிருக்கும்.

2. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இருக்கலாம்.

இது ஒரு முடியாத நிகழ்ச்சி. ஏனெனில் L-ல் மீப்பெரு எண் **a** எனவும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண் **b** எனவும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்போது $\frac{a+b}{2}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண் L-லும், R-லும் இராது. ஏனெனில்,

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

இது, அளவுக்கிணங்கிய எண்களெல்லாம், R-லோ, L-லோ இடம்பெறும் என்ற கொள்கைக்கு முரண்பாடாகின்றது. எனவே, L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இருக்கும் என்பது நிகழமுடியாது. இப்படிப்பட்ட பிரிவினை இயலாது என்ற முடிவு பெறப்படுகிறது.

3. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இராது.

முன்னர் $x^2 < 2$ ஆனல், x-என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண் L-லும், $x^2 > 2$ ஆனல் x-என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண் R-லும் பிரித்து எழுதியபொழுது, L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும் இருக்க முடியாது எனவும், R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் இருக்க முடியாதெனவும் நிறுவினேம் (14·3·5. காண்க).

இப்போது நாம் எல்லா அளவுக்கிணங்கிய எண்களையும் பாகு படுத்தி எழுதும்போது,

1. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணோ, அல்லது R-ல் ஒரு மீச் சிறு எண்ணோ இருக்குமாயின் (L,R) என்ற பாகுபாடு ஓர் அளவுக் கிணங்கிய எண்ணைக் குறிக்கும் எனவும்,

2. L-ல் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும் R-ல் ஒரு மீச்சிறு எண்ணு மில்லாது அப் பாகுபாடு அமையுமாயின் (L,R) என்ற பாகு பாடு ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண்ணைக் குறிக்கு மெனவும், முறையே

'அளவுக்கிணங்கிய எண்ணையும்'

'அளவுக்கிணங்காத எண்ணையும்'

வரையறுக்கலாம்.

வரையறை: அளவுக்கிணங்கிய எண்களும், அளவுக்கிணங் காத எண்களும் சேர்ந்து 'மெய்யெண்கள்' (Real numbers) எனப்படும். (இது முன்னரும் கூறப்பட்டது காண்க).

அளவுக்கிணங்கிய எண்கள், இவ்விதப் பாகுபாட்டில் இரு வகுப்புகளால் வரையறுக்கப்படும். நமது வசதிக்காக, அளவுக் கிணங்கிய எண்ணாகிய $\frac{m}{n}$ஐ வரையறுக்கும்போது, $\frac{m}{n}$ஐ L-என்ற வகுப்பிலேயே வைத்துக்கொள்வோம். அதாவது ஒரு மீப்பெரு எண் L-ல் உள்ள பாகுபாடு ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணைக் குறிக்கும் பிரிவினையாகும்.

எனவே, ஒரு மெய்யெண் (அளவுக்கிணங்கியதோ, இணங் காததோ) இப்போது ஒரு பிரிவினையின் அடிப்படையில் வரை யறுக்கப்படுகிறது. இந்த வரையறையின் அடிப்படையில் அளவு (பெரிய எண், சிறிய எண்) கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல், படிமூலம் காணல் முதலிய எல்லாச் செயல்களும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இம் முறைப்படி இச் செயல்களை வரையறுப்பதால் ஏற்படும் விளைவுகள், நாம் சாதாரணமாக அளவுக்கிணங்கிய எண்களைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ, பெருக்கவோ, வகுக்கவோ செய்தால் பெறும் விளைவுகளுக்கு எந்தவிதத்திலும் முரண்படாதபடி அமைத்துக்கொள்கிறோம். இவை நம்மைப் பகுவியலில் வெகுதொலை கொண்டுசெல்லு மாதலால் இந் நூலில் விளக்கப்படாது விடப்படுகிறது.

14·4. மெய்யெண்கள் – அளவு — தொடர்பு

மெய்யெண்கள் எவ்வாறு வரிசைப்படுத்துவதென்பதைப் பார்ப்போம். அதாவது x, y என்ற இரு மெய்யெண்களின் பகுப்பில் எது பெரிது, எது சிறிது என வரிசைப்படுத்தும் முறையை, பிரிவினை வரையறையோடு எப்படித் தொடர்புப்படுத்துவதெனப் பார்ப்போம்.

அளவுக்கிணங்கிய எண்களைப்பற்றி இவ் வரிசைப்படுத்தல் நமக்குத் தெரியும். கூட்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களாயின்

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ஆனல் } ad > bc \text{ என நிறுவலாம்.}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore \frac{ad-bc}{bd} > 0$$

$$\therefore ad > bc.$$

குறை அளவுக்கிணங்கிய எண்களுக்கும் இயற்கணித மரபுபடி எது பெரிது எது சிறிதென நாம் கண்டு கொள்ளலாம். நமது சாதாரண இயற்கணித முறைகளே அளவுக்கிணங்கிய எண்களுக்குப் பொருத்தமானது. ஆனல், பொதுவாக ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண்ணும் ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணும் கொடுக்கப்பட்டால் எது பெரிது எனக் காண்பதெப்படி?

(L_1, R_1) என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களின் பிரிவினை $\sqrt{2}$ என்ற அளவுக்கிணங்காத எண்ணைக் குறிக்கட்டும். (L_2, R_2) என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண் பிரிவினை $1\frac{1}{2}$ஐக் குறிக்கட்டும். (L_1, R_1) என்ற பிரிவினையில் L_1-ல் மீப்பெரு எண்ணும், R_1-ல் மீச்சிறு எண்ணும் இராது. $1\frac{1}{2}$ என்ற எண் L_1-ல் இருந்தால் $\sqrt{2} > 1{\cdot}5$. $1{\cdot}5$ என்ற எண் R_1-ல் இருந்தால் $\sqrt{2} < 1{\cdot}5$ என்பது முடிவாகும். இப்பொழுது

$$(1{\cdot}5)^2 = 2{\cdot}25 > 2$$

ஆதலால் $1{\cdot}5$, R_1-ல்தான் இருக்கும்.

$$\therefore \sqrt{2} < 1{\cdot}5$$

பொதுவாக (L_1, R_1) என்ற ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்களின் பிரிவினை ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண்ணைக் குறிக்கிறதெனக்

கொண்டு அது குறிக்கும் அளவுக்கிணங்காத எண் M எனக் கொள்வோம். (அதாவது $(L_1, R_1) = M$). **m** ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கிணங்கிய எண் எனக் கொள்வோம். **m** என்ற அளவுக் கிணங்கிய எண் L_1-ல் இருந்தால் $M > m$; மாருக **m** என்ற எண் R_1-ல் இருந்தால் $M < m$ என்பது பொருந்தும். இதை எளிதாக நிறுவலாம்.

L_1-ல் மீப்பெரு எண் ஏதும் இல்லை; எனவே m என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண் L_1-ல் இருந்தால் mஐவிடப் பெரிய எண்களும் L_1-ல் இருக்கும். எனவே L_1-ல் உள்ள m-ஐவிடப் பெரிய எண்கள் Mஐவிடக் குறைந்தவை. எனவே $m < M$. இவ்வாறே அடுத்த பகுதியையும் நிறுவலாம்.

மேலும், இரு அளவுக்கிணங்காத எண்களை (L_1, R_1)-என்ற பிரிவினையும் (L_2, R_2)-ம் குறிக்குமானல்

(1) L_1-ம் L_2-ம் சர்வசமமாகவும்

R_1-ம் R_2-ம் சர்வசமமாகவும்

இருப்பின் இவ்விரு அளவுக்கிணங்காத எண்களும் சர்வ சமம் எனக் கொள்ளப்படும். நிறுவன் முறை பார்த்தாலே தெரியும்.

(2) (L_1, R_1) என்ற பிரிவினை α_1-என்ற அளவுக்கிணங்காத எண்ணையும் (L_2, R_2) என்ற பிரிவினை α_2-என்ற அளவுக்கிணங் காத எண்ணையும் குறிக்கட்டும். L_1-ல் தோன்றும் அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் R_2-ல் தோன்றுமாயின் $\alpha_1 > \alpha_2$. ஏனெனில் L_1-ல் மீப்பெரு எண் கிடையாது. L_1-ல் தோன்றும் ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் R_2-ல் தோன்றுமாயின் அவ் வெண்ணுக்கு மிகைப்பட்டு L_1-ல் தோன்றும் எல்லா எண் களும் R_2-ல் தோன்றும். எனவே R_2-ல் தோன்றும் எண்களில் தோன்றும் எண்ணற்றவை L_1-ல் காணப்படும். எனவே $\alpha_1 > \alpha_2$.

α_1 என்ற மெய்யெண் α_2 என்ற மெய்யெண்ணைவிட மிகைப்படின் α_2 என்ற மெய்யெண் α_1ஐ விடக் குறைபடும்.

ஆகவே $>, =, <$ என்ற குறிகளை நாம் அளவுக்கிணங்கிய எண்களுக்குப் பயன்படுத்துவது போல் எல்லா மெய்யெண் களுக்கும் பொதுவாகப் பயன்படுத்தக்கூடும் எனத் தெரிந்து கொள்கிறேம். β என்ற மெய்யெண் α_1, α_2 என்ற இரு மெய் யெண்களுக்கும் இடைப்பட்டதெனக் கூறும்போது β என்பது

ஒன்றைவிடக் குறைந்தும் மற்றொன்றைவிடப் பெரியதாயும் இருக்குமென்பது பொருள். அதாவது

$$\alpha_1 > \beta > \alpha_2$$

அல்லது $$\alpha_1 < \beta < \alpha_2$$

மேலே கூறியவைகளிலிருந்து நாம் **மெய்யெண்களை வரிசைப்படுத்தி எழுதலாம் என அறிகிறோம்.**

14·5· அளவுக்கிணங்கிய எண்களுக்குப் பொருந்திய பண்புகள் யாவும் நாம் விரிவுபடுத்திப் பெற்ற மெய்யெண்களுக்கும் பொருந்துகின்றனவென நிறுவலாம்.

அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் எவையேனும் இரண்டிடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களை இடைச்செருகலாம் என நாம் அறிவோம். $a < b$ என்ற வகையில் a, b இரண்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களெனக் கொண்டால் அவைகளுக்கிடையே, n (n-எவ்வளவு பெரிய கூட்டு முழு எண்ணாயினும்) அளவுக்கிணங்கிய எண்களை நாம் இடைச்செருக முடியும் என எளிதில் காணலாம்.

$$a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ \ a+\frac{2\,(b-a)}{n+1},\ \ldots,\ a+\frac{n\,(b-a)}{n+1},\ \ b$$

என்ற தொடர் மேற்கூறியதை விளக்கும். அவ்வாறே

(1) மெய்யெண்கள் எவையேனும் இரண்டிற்கிடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களை இடைச்செருகல் செய்யலாம்.

(2) மெய்யெண்கள் எவையேனும் இரண்டிற்கிடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்களை இடைச்செருகல் செய்யலாம் என்ற கூற்றுகளை முறையாக நிறுவுவோம்.

(1) இரு மெய்யெண்களில்,

(i) இரண்டும் அளவுக்கிணங்கிய எண்களாயிருக்கலாம்.

(ii) ஒன்று அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாகவும் மற்றொன்று அளவுக்கிணங்காத எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

(iii) இரண்டுமே அளவுக்கிணங்காத எண்களாக இருக்கலாம்.

(i) முன்னரே நிறுவப்பட்டது.

(ii) α-அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாகவும், α_1-அளவுக் கிணங்கா எண்ணாகவும், $\alpha > \alpha_1$ எனக் கொள்வோம். α_1 என்பது (L, R) என்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் பிரிவினையால் கொடுக்கப்படுகிறதெனக் கொள்க. அப்போது α என்பது R-ல் காணப்படும்; மேலும் R-ல் மீச்சிறு எண் கிடையாது. எனவே R-ல் αஐவிடக் குறைவான எண்ணற்ற அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் இருக்கும். எனவே α_1ஐவிட மிகுந்து α-க்குக் குறைந்து உள்ள எண்கள் எண்ணற்றவை எனத் தெரிகின்றது. இம்மாதிரியாக $\alpha < \alpha_1$ ஆக இருப்பினும் இவ் வுண்மையை நிறுவலாம்.

(iii) α, α_1 இரண்டும் அளவுக்கிணங்காத எண்களா யுள்ளனவெனக் கொள்வோம். $\alpha = (L, R)$ எனவும், $\alpha_1 = (L, R_1)$ எனவும் ஏற்போம். மேலும் $\alpha > \alpha_1$ எனவும் ஏற்போம். அப்போது R_1-ல் உள்ள எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் L-ல் காணப்படும். அவை யாவும் αஐவிடச் சிறியவை, α_1ஐ விட மிகுந்தவை. எனவே α-க்கும் α_1-க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் உள்ளன வென நிறுவப்படுகிறது.

இதே மாதிரியாக $\alpha < \alpha_1$ ஆக இருப்பினும் இவ் வுண்மையை நிறுவலாம்.

கடைசியாக எவையேனும் இரு மெய்யெண்களிடையே எண் ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்கள் உள்ளன வென்பதை நிறுவு வோம்.

α, α_1 என்பவை மெய்யெண்களெனவும், $\alpha < \alpha_1$ எனவும் ஏற்போம். α, α_1-இரண்டிற்கு மிடையே β, β_1 $(\beta < \beta_1)$ என இரு அளவுக்கிணங்கிய எண்களைக் காணலாம். அதாவது $\alpha < \beta < \beta_1 < \alpha_1$ என்ற வகையில் α, α_1 என்ற இரு மெய்யெண்களும் β, β_1 என்ற இரு அளவுக்கிணங்கிய எண்களும் இருக்கட்டும். β-க்கும் β_1-க்கும் இடையே ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண் இருக்கிறதென நிறுவிவிட்டால் நாம் நிறுவ வேண்டிய உண்மை நிறுவப்பட்டுவிடும்.

i-என்பது ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண் எனக் கொள்வோம். இது β-க்கும் β_1-க்கும் இடையிலில்லாவிட்டால் i-ஓடு m என்ற ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணைக் கூட்டி,

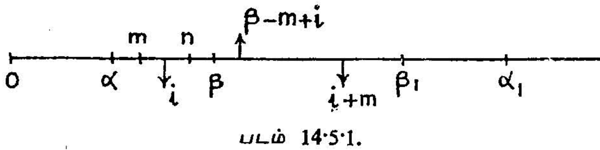
$$\beta < i+m < \beta_1$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் கொண்டுவர இயலும். ஏனெனில் $m < i < n$ எனவும், $(n-m) < (\beta_1 - \beta)$ என்ற வகையிலும் m, n என இரு

அளவுக்கிணங்கிய எண்களைக் காணலாம். இப்போது $\beta-m+i$ என்பது ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண்; அது β-க்கும் β_1-க்கும் இடைப்பட்டது. ஏனெனில்,

$$\begin{aligned}\beta + (i-m) &= \beta + i - m + n - n \\ &= \beta + (n-m) - (n-i) \\ &< \beta + (\beta_1-\beta) - (n-i) \\ &\qquad [\because (n-m) < (\beta_1-\beta)] \\ &= \beta_1 - (n-i) \\ &< \beta_1 \ (\because n > i)\end{aligned}$$

$\therefore \beta < \beta + (i-m) < \beta_1$. இதுவே நாம் நிறுவ முற்பட்டதாகும். பின்வரும் படம் 14·5·1. இதை விளக்கும். ஆனால் படம் தேவையில்லை.



படம் 14·5·1.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $1\frac{1}{2}$-க்கும் 2-க்கும் இடையே எத்தனை அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் வேண்டுமானாலும் காணமுடியும்.

10,000 அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$1\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{1}{2} + \frac{1}{20002},\ 1\tfrac{1}{2} + \frac{2}{20002}, \ldots$$

$$1\tfrac{1}{2} + \frac{10000}{20002},\ 1\tfrac{1}{2} + \frac{10001}{20002}\ (=2)$$

பொதுவாக N அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் $a, b\ (a < b)$ என்ற இரு அளவுக்கிணங்கிய எண்களுக்கிடையே வேண்டுமானால்,

$$b = a + (\mathrm{N}+1)\,d$$

என எழுதி

$$d = \frac{b-a}{\mathrm{N}+1}$$

எனக் கொண்டால்

$$a,\ a+\frac{b-a}{N+1},\ \ldots\ a+\frac{N\,(b-a)}{N+1},\ a+\frac{(N+1)\,(b-a)}{N+1}\,(=b)$$

என்ற எண்கள் வரும்.

2. 2-க்கும் $\sqrt{5}$-க்கும் இடையே எத்தனை அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் வேண்டுமானாலும் காணமுடியும்.

N-க்கு மேற்பட்ட எண்கள் வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$(2{\cdot}2)^2 = 4{\cdot}84 < 5$$

என்பதால் 2-க்கும் 2·2-க்கும் இடையே N-அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் காணலாம். அவை யாவும் 2-க்கும் $\sqrt{5}$-க்கும் இடைப் பட்டிருக்கும்.

3. $\sqrt{7}$-க்கும், $\sqrt{11}$-க்குமிடையே எத்தனை அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் வேண்டுமானாலும் காண முடியும்.

$$(2{\cdot}7)^2 > 7\,;\quad (3{\cdot}3)^2 < 11$$

எனவே, 2·7-க்கும், 3·3-க்கும் இடையேயுள்ள அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் யாவும் $\sqrt{7}$-க்கும், $\sqrt{11}$-க்கும் இடையே உள்ள அளவுக் கிணங்கிய எண்களாகும்.

4. 1·5-க்கும், $\sqrt{3}$-க்கும் இடையே எத்தனை அளவுக் கிணங்காத எண்கள் வேண்டுமானாலும் காணலாம்.

$$1{\cdot}5 < 1{\cdot}6 < 1{\cdot}7 < \sqrt{3}$$

என்ற சமனின்மை வெளிப்படை. $\sqrt{2{\cdot}8}$ ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண். மேலும்

$$(1{\cdot}6)^2 = 2{\cdot}56$$

$$(1{\cdot}7)^2 = 2{\cdot}89$$

எனவே,

$$1{\cdot}6 < \sqrt{2{\cdot}8} < 1{\cdot}7$$

எனத் தெரிகிறது. 1·6-க்கும், 1·7-க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களை x_1, x_2, ... எனக் காணலாம். அப்போது

$$1{\cdot}5 < x_1 < x_2 < \sqrt{3}$$

எனக் கிட்டும். x_1, x_2-க்கு இடையே மற்றோர் அளவுக்கிணங்காத எண் காணலாம். இவ்வாறே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத

எண்கள் 1·6-க்கும் 1·7-க்கும் இடையே, அதாவது 1·5-க்கும் $\sqrt{3}$ க்கும் இடையே காணலாம்.

5. $\sqrt{5}$-க்கும் $\sqrt{8}$-க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்கள் காணலாம்.

முதலில் $\sqrt{5} < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}7 < \sqrt{8}$ என நாம் காணலாம். இப்போது $\sqrt{3}$ என்ற அளவுக்கிணங்காத எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$1{\cdot}7 < \sqrt{3} < 1{\cdot}8$$

என நமக்குத் தெரியும். இதிலிருந்து $\sqrt{3} > 1{\cdot}7$ என்பதால் $\sqrt{3} - 1{\cdot}7$-ன் மதிப்புக் கூட்டெண்.

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{3} - 1{\cdot}7 > 2{\cdot}5$$

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 < \sqrt{3} + 2{\cdot}5 - 1{\cdot}7$$

மேலும் $\sqrt{3} < 1{\cdot}8$ ஆனபடியால் $\sqrt{3} - 1{\cdot}8$-ன் மதிப்புக் குறையெண்.

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{3} - 1{\cdot}8 < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}6$$

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{3} - 1{\cdot}8 + {\cdot}1 < 2{\cdot}7$$

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{3} - 1{\cdot}7 < 2{\cdot}7$$

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 < \sqrt{3} + 2{\cdot}5 - 1{\cdot}7 < 2{\cdot}7$$

அதாவது

$$2{\cdot}5 < \sqrt{3} + {\cdot}8 < 2{\cdot}7$$

எனவே 2·5-க்கும் 2·7-க்கும் இடையே ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண் இருக்கிறது. ஆனால் 2·5-க்கும் 2·7க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$$

என உள்ளன. எனவே 2·5-க்கும் 2·7-க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்கள் உள்ளன. அதாவது இன்னும் விரிவாக $\sqrt{5}$-க்கும் $\sqrt{8}$ க்கும் இடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்கள் உள்ளன.

$\sqrt{3}$-க்குப் பதிலாக, $\sqrt{11}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$3{\cdot}3 < \sqrt{11} < 3{\cdot}4$$

என எளிதில் நிறுவலாம். $\sqrt{11} > 3{\cdot}3$ ஆனபடியால் $\sqrt{11} - 3{\cdot}3$-ன் மதிப்புக் கூட்டெண்.

$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{11} - 3{\cdot}3 > 2{\cdot}5$

$\therefore \quad 2{\cdot}5 < 2{\cdot}5 + \sqrt{11} - 3{\cdot}3$

மேலும் $\sqrt{11} < 3{\cdot}4$ ஆனபடியால்

$\sqrt{11} - 3{\cdot}4$-ன் மதிப்புக் குறையெண்.

$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{11} - 3{\cdot}4 < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}6$

$\therefore \quad 2{\cdot}5 + \sqrt{11} - 3{\cdot}4 + {\cdot}1 < 2{\cdot}7$

$\therefore \quad 2{\cdot}5 < 2{\cdot}5 + \sqrt{11} - 3{\cdot}3 < 2{\cdot}7$

அதாவது $2{\cdot}5 < \sqrt{11} - 0{\cdot}8 < 2{\cdot}7$

இவ்வாருக எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்கள் $2{\cdot}5$-க்கும் $2{\cdot}7$-க்குமிடையே, அதாவது இன்னும் விரிவாக $\sqrt{5}$-க்கும் $\sqrt{8}$-க்கும் இடையே காணலாம்.

எனவே, **இரண்டு வேறுபட்ட மெய்யெண்களிடையே எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்கிய எண்களும் எண்ணற்ற அளவுக்கிணங்காத எண்களும் காணலாம்** என்ற உண்மை புலனுகிறது.

இதை வேறு விதத்தில் கூறினுல்

இரண்டு வேறுபட்ட மெய்யெண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற மெய்யெண்கள் காணலாம் என விளக்கமாகும்.

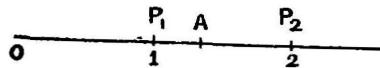
14·6· இந்த விளக்கங்களின் அடிப்படையில் டெடிகண்ட் கண்ட வெளிப்படை உண்மை என்ன (Dedekind's Axiom) வெனப் பார்ப்போம்.

(i) **கோட்டுத் தொடரகமும்** (Linear Continuum)

(ii) **எண் தொடரகமும்** (Arithmetical Continuum)

இப்போது 14·3·1-ல் கண்ட நேர்கோட்டுக்கு வருவோம். 0-போன்ற புள்ளியை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு, ஒரு வசதியான அலகுகொண்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களை அந் நேர்கோட்டின்மேல் குறித்தோம். அப் புள்ளிகளுக்கு அளவுக்கிணங்கிய எண் புள்ளிகளெனப் பெயரிட்டோம். எண்களுக்கும் நீளங்களுக்கும் ஒரு தொடர்பினை ஏற்படுத்தினேம்.

மேலும் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ போன்ற அளவுக்கிணங்காத எண்களுக்குரிய நீளங்களை வடிவகணித முறைப்படி கண்டோம்.



படம் 14·6·1·

படம் 14·6·1-ல் A என்பது $\sqrt{2}$ஐக் குறிக்கிற நீளமென்று கொள்வோம். $\sqrt{2}$ என்பது ஓரலகைச் செங்கோணப் பக்கங்களாகக் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கமாகும். எனவே A என்பது அந் நேர்கோட்டிலுள்ள அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகளை இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கிறது. (L, R) = $\sqrt{2}$ எனக் கொண்டால், L-வகுப்பில் உள்ள அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் A-க்கு இடப்புறமும், R-வகுப்பிலுள்ள அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் A-க்கு வலப்புறமும் பிரிந்து நிற்கின்றன. இடப்புற அளவுக்கிணங்கிய புள்ளிகளுக்கு ஓர் இறுதிப்புள்ளி யிராது; வலப்புற அளவுக்கிணங்கிய புள்ளிகளுக்கு ஒரு தொடக்கப்புள்ளியும் இராது. எனவே, ஒவ்வோர் அளவுக்கிணங்கிய எண்ணுக்கு அந் நேர்கோட்டின் மேல் திட்டமான புள்ளியொன்றுண்டு. கூட்டு, குறை மதிப்புள்ள எல்லா முழு எண்களையும், பின்னங்களையும் அந் நேர்கோட்டின் மேல் குறிக்கலாம். இவை அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள்.

அவ்வாறே, அந் நேர்கோட்டின்மேல் அளவுக்கிணங்காத எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளும் எண்ணற்றவை. இப் புள்ளிகளின் இரு மருங்கினின்றும் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் வழியாக இரு புள்ளிகளுக்கு எவ்வளவு நெருக்கமாக வேண்டுமானாலும் நாம் செல்லலாம்; ஆனால் அப் புள்ளிகளையே அடைய முடியாது.

எனவே, நேர்கோட்டின்மேல் அளவுக்கிணங்கிய (எண்) புள்ளிகள் மட்டுமேயல்லாமல் வேறு புள்ளிகளும் ஏராளமாக உள்ளன. அவை $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... என்ற அளவுக்கிணங்காத எண்களை வடிவகணித முறைப்படி குறித்து நிற்கின்றன. எனவே, ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறித்து நிற்கிறது; வேறு வேறு புள்ளிகள் வேறு வேறு மெய்யெண்களைக் குறித்து நிற்கின்றன.

இப்போது எழும் கேள்வி யாதெனில், ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் குறிக்க அந் நேர்கோட்டின்மேல் ஒரு தனிச் சிறப்பான புள்ளி உள்ளதா? என்பதாகும்.

அளவுக்கிணங்கிய எண்களைப் பொறுத்தமட்டில் அக் கேள்விக்கு 'ஆம்' என்ற பதிலை உறுதியாகக் கொடுக்கலாம். ஆனால் அளவுக்கிணங்காத எண்களைப் பொறுத்தவரை, அக் கேள்விக்கு 'ஆம்' என்று பதில் கூறி அதை நிறுவுதல் இயலாது. **அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் பிரிவினைப்படி ஒவ்வொரு பிரிவினைக்கும் ஒரே ஒரு தனிச்சிறப்பான மெய்யெண் உண்டு என்பது நம் கொள்கைக்கு அடிப்படையாக ஏற்றுக்கொள்ளும் ஒரு கருத்தேயாகும்.** இப்படி நிறுவுதலின்றி ஏற்றுக்கொள்ளும் கருத்துதான் டெடிகண்ட் வகுத்த வெளிப்படை உண்மை எனப்படும். இதன் வழியாக நாம் ஒரு நேர்கோட்டில் 'தொடர்ச்சி' என்ற கருத்தினை நிலைநாட்டுகிறோம். இக் கருத்தினை ஏற்பதால்,

'ஒரு நேர்க்கோட்டில் P என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் உரியதொரு மெய்யெண் (அளவுக்கிணங்கிய அல்லது இணங்காத எண்) **உண்டு. அது OP-ன்** நீளம். **மறுதலையாக ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் அந் நேர்கோட்டின்மேல் உரியதொரு புள்ளி P என வுண்டு; OP-ன் அளவு அப் புள்ளியைக் குறிக்கும்.**

இப்போது **நேர்கோட்டின்மேல் உள்ள புள்ளிகளுக்கும்** (Linear Continuum – நீளத் தொடரகம்). **மெய்யெண்கள் எல்லாவற்றிற்கும்** (Arithmetical Continuum – மெய்யெண் தொடரகம்) **உள்ள தொடர்பு முற்றிலும் பொருந்துகிறது. புள்ளிகளை எண்களின் பிம்பங்கள் எனவும், எண்களைப் புள்ளிகள் குறிக்கின்றன எனவும் நாம் தொடர்புபடுத்தி அத் தொடர்பினை முழுமையாக்குகிறோம்.**

14·7. ஒரு மெய்யெண்ணின் மட்டு மதிப்பு (Modulus of a real number)

x-என்ற மெய்யெண் ஒன்றிருப்பின் அதன் **மட்டு** மதிப்பு, அல்லது **தனி** (Absolute) மதிப்பு அல்லது **எண்** மதிப்பு என்பதைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

14·7·1. வரையறை :

x-கூட்டெண்ணாயின் $|x| = x$

x-குறையெண்ணாயின் $|x| = -x$

x-பூச்சியமாயின் $|x| = 0$

$|x|$ என்பதை மட்டு மதிப்பு x எனப் படிக்கிறோம்.

மட்டு மதிப்புகள் பின்வரும் பண்புகளையுடையன :

(i) $|x| \geqslant 0$ ஆக இருக்கும்.

(ii) x பூச்சியமானல் $|x| = 0$

(iii) $|xy| = |x|\,|y|$

(iv) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ [விலக்கு $y = 0$]

(v) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(vi) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

(vii) $|x-y| < r$ எனில்

$$y-r < x < y+r$$

$$x-r < y < x+r$$

என்பவை உண்மை.

(viii) x-ம் $-x$-ம் $\leq y$ ஆயின், $y \geqslant 0$
ஆக இருத்தல் வேண்டும். மேலும்

$$|x| \leqslant y$$

ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

தெரிப்பு :

(i), (ii), (iii), (iv) எல்லாம் வெளிப்படை.

(v) $x \leqslant |x|$

$y \leqslant |y|$

$\therefore\ x+y \leqslant |x| + |y|$

மேலும் $-x \leqslant |x|$

$-y \leqslant |y|$

$\therefore\ -(x+y) \leqslant |x| + |y|$

$\therefore\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$ என நிறுவப்படுகிறது.

(vi) $|x| = |x-y+y|$

$\leq |x-y| + |y|$

அவ்வாறே

$|y| \leq |x-y| + |y|$ [$|x| = |-x|$ ஆகையால்]

$\therefore \quad |x| - |y| \leq |x-y|$

$|y| - |x| \leq |x-y|$

இவ் விரண்டையும் சோதித்தால்

$$\Big|\, |x| - |y| \,\Big| \leq \Big| x-y \Big|$$

என்று கிட்டும்.

(vii) $|x-y| < r$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது

$x-y < r$ எனப் பெறலாம்.

மேலும்

$y-x < r$ எனவும் பெறலாம்.

$\therefore \quad x < y+r$

$x > y-r$

$\therefore \quad y-r < x < y+r$ என நிறுவப்படுகிறது.

மறுதலையாக

$y-r < x < y+r$ எனில்

$y-x < r$

$x-y < r$

என்ற இரண்டும் கிட்டும். எனவே

$$|x-y| < r$$

என்ற முடிவும் கிட்டும். x, y என்பவை ஏதானுமிரண்டு மெய் யெண்களாதலால்

$$|y-x| < r$$

என்றும் கிட்டும்.

14·8· ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் ஓர் இடைவெளி (An interval on a straight line)

a, b என்பவை இரு மெய்யெண்கள். $a < b$. $a \leq x \leq b$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட எல்லா x-மெய்யெண் மதிப்புகளும் **ஒரு மூடிய இடைவெளி** (closed interval) எனப்படும். இடப்புற முனைப்புள்ளியான a-ம் வலப்புற முனைப்புள்ளியான b-ம் இவ் விடைவெளியில் அடங்கியவை. இம் மூடிய இடைவெளியை $[a, b]$ எனக் குறியிடுவது மரபு.

$a < x < b$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட எல்லா x-ன் மெய்யெண் மதிப்புகளும் ஒரு திறந்த இடைவெளி (**open** interval) எனப்படும். $a \leq x < b$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்ட எல்லா x-ன் மெய்யெண் மதிப்புகள், இடப்பக்கம் மூடி வலப்பக்கம் திறந்த இடைவெளி யெனப்படும். எழுதும் மரபு $[a, b)$. அவ்வாறே $a < x \leq b$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட எல்லா x-ன் மெய்யெண் மதிப்புகள், வலப் புறம் மூடி இடப் புறம் திறந்த இடைவெளி யெனப்படும். எழுதும் மரபு $(a, b]$. சில சமயங்களில் பின் கூறப்பட்ட இரு இடைவெளிகளும், பாதி மூடிய (semi-closed) அல்லது பாதி திறந்த (semi-open) இடைவெளிகள் எனக் கூறப்படும். a, b இரண்டும் முறையே இடமுனைப் புள்ளி (left end-point), வலமுனைப் புள்ளி (right end point) எனப்படும்.

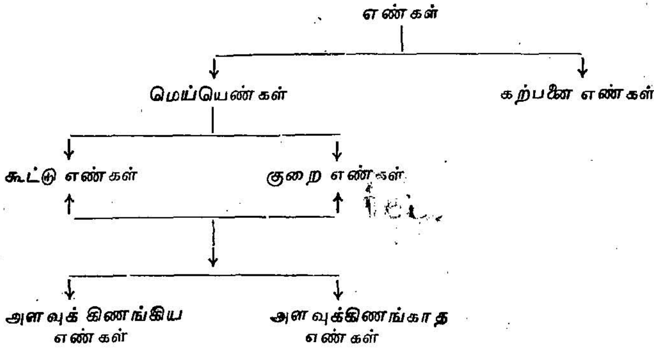
14·8·1. நேர்கோட்டில் கந்தழி இடைவெளிகள் (Infinite Intervals on Straight Lines)

a ஒரு மெய்யெண் எனக் கொள்வோம். $x > a$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட எல்லா x-மெய்யெண் மதிப்புகளும் பாதி திறந்த கந்தழி இடைவெளி எனப்படும். எழுதும் மரபு (a, ∞). $x < a$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட எல்லா x-மெய்யெண் மதிப்புகளும் பாதி திறந்த கந்தழி இடைவெளி யெனப்படும். எழுதும் மரபு $(-\infty, a)$. முறையே $x \geqslant a$, $x \leq a$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்ட எல்ல x-ன் மதிப்புகளும் பாதி மூடிய கந்தழி இடைவெளிக ளெனப்படும். அவற்றினை முறையே

$$[a, \infty) ; \quad (-\infty, a]$$

என எழுதுவது மரபு. கடைசியாக எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளையும் x-ஏற்குமாயின், அது இருபுறக் கந்தழி இடைவெளி யெனப்படும்; எழுதும் மரபு $(-\infty, \infty)$.

இவ்வளவு நுணுக்கமாக நாம் எண்களைப்பற்றி அறிந்தவை யாவும் பின்னர் மேற்படிப்பில் 'சார்புகள்' என்பவைகளைப்பற்றிப் படிப்பதற்குப் பயன்படும். பின்வரும் படம் எண்களின் பாகுபாட்டை நன்கு விளக்கும்.



படம் 14·8·1·

பயிற்சி 14·3.

1. பின்வரும் அளவுக்கிணங்காத எண்களை வடிவகணித முறைப்படி எப்படி ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் இடங்குறிக்கலாமெனக் கூறுக.

$$\sqrt{15},\ \sqrt{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{5}{4}},\ \sqrt{20},\ \sqrt{10},\ \sqrt{\frac{24}{9}}$$

2. இரு எண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றிற்கிடையே குறிப்பிட்ட எண்களைத் தருக.

(i) 2, 3 (ஏதேனும் இரு அளவுக்கிணங்காத எண்கள்)

(ii) 1, $\sqrt{2}$ (ஏதேனும் மூன்று அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்)

(iii) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ (ஏறுவரிசையில் ஏதேனும் இரண்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களும், மற்று ஏதானுமிரண்டு அளவுக்கிணங்காத எண்களும்)

(iv) 1, 10 (ஏதேனும் 20 அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்)

(v) 1·5, 1·6 (ஏதேனும் இரண்டு அளவுக்கிணங்காத எண்கள்)